Experimente mit Tischkreisel und Digitalkamera

Hans Martin Sauer

15. Juni 2024

www.sauerampfer-online.de
Das Physik & Elektronik Archiv

1 Zusammenfassung

Mit einer Digital- oder Smartphonekamera lassen sich spannende physikalische Experimente machen. Sie sieht Vorgänge, die für das Auge zu schnell sind, wie zum Beispiel bewegte Muster auf der Oberfläche eines rotierenden Kreisels. Was Sie sonst noch brauchen? Einen Tischkreisel. Als Kind hatte ich einen Musikkreisel. Das wäre ein geradezu ideales Objekt! Man kann sich einen Kreisel natürlich auch selbst anfertigen. So geht das Experiment: Kreisel mit der Hand auf dem glatten Fußboden oder Tisch anwerfen und taumeln, *präzedieren* lassen. Das filmen Sie mit der Kamera. Den Rest erledigen Sie am Bildschirm. Sie kommen hinter das Geheimnis des Kreisel, der nicht umfällt. Ich zeige Ihnen, worauf Sie achten müssen.

2 Tischkreisel

Ein *Tischkreisel* – in der Physik bezeichnet man das als *schweren Kreisel*, weil neben dem Drehimuls auch das Kippmoment eine Rolle spielt – ist ein starrer Rotationskörper, der auf der Unterseite in einem mehr oder weniger spitzen, axialen Finger ausläuft, so wie in Abbildung gezeigt. Stellt man einen solchen Kreisel, wenn er rotiert, auf eine ebene Unterlage, dann fällt er nicht um wie ein gewöhnlicher Gegenstand, sondern hält sich in seiner Lage. Er führt eine Taumelbewegung aus, er *präzediert*. Wenn $\vec{n}$ der nach oben gerichtete Normalenvektor auf der Unterlage ist. Seine Achse, gegeben durch Einheitsvektor $\vec{\ell}$, rotiert in einen konstanten *Präzessionswinkel* θ um die Normale. Sie überstreicht periodisch einen Kegelmantel mit Öffnungswinkel 2θ.

$$\vec{n} \cdot \vec{\ell} \;=\; \cos\theta \tag{1}$$

Die *Präzessionsfrequenz* f_p ist viel kleiner als die Rotationsfrequenz f_0 des Kreisels. Man fragt sich, wodurch f_p bestimmt wird und wodurch die Präzession in Gang gebracht wird.

Die Vektoren der Kreisfrequenzen $\vec{\omega}_0 = 2\pi f_0 \vec{\ell}$ und $\vec{\omega}_\mathrm{p} = 2\pi f_\mathrm{p} \vec{n}$ sind zur Kreiselachse $\vec{\ell}$ ($|\vec{\ell}| = 1$) beziehungsweise zur Normalen $\vec{n}$ parallel.

2.1 Praktische Kreiselformen

Für dieses Experiment habe ich an der Drehmaschine verschiedene Tischkreisel aus Eisen und gegossenem Blei angefertigt. Natürlich könnte man auch einen Kreisel mit festen Achslagern verwenden, doch benötigt man hierfür viel mehr Komponenten, deren Herstellung sehr viel schwieriger ist. Die Tischkreisel haben Achsenlängen zwischen vier und zwölf Zentimeter und 50 bis 660 g Masse. Maße und das Massenträgheitsmoment wurden genau vorausberechnet. Auch auf die genaue Form der Kreiselspitze kommt es an. Die Achse ist nicht etwa spitz, sondern sorgfältig verrundet. Das unterscheidet den Tischkreisel von einem spitzen oder fest gelagerten Kreisel. Auf die besonderen Laufeigenschaften beider Kreiseltypen werden wir noch eingehen.

2.2 Wichtige Kreisel-Eigenschaften

Das *Massenträgheitsmoment* J_0 ist das Verhältnis zwischen dem *Drehzahlvektor* des Kreisels und seinem *Drehimpuls* $\vec{L}$. Es legt zudem das Verhältnis seiner kinetischen Energie E_{kin} zur Drehzahl fest. Der Drehzahlvektor $\vec{\omega}_0 = 2\pi f_0 \vec{\ell}$ wird aus der Kreisfrequenz $2\pi f_0$ der Rotation und dem Einheitsvektor $\vec{\ell}$ gebildet, der die Achsrichtung angibt, von der Kreiselspite aus entlang der Achse nach oben gesehen.

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{L} \quad [\mathrm{g\,cm^2/s}] & = & 2\,\pi\, f_0\, J_0\, \vec{\ell} \\ E_{\mathrm{kin}} \quad [\mathrm{Ws}] & = & \frac{1}{2}\, 10^{-7}\, J_0\, (2\pi f_0)^2 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Die Drehzahl f_0 geben wir in *Umdrehungen pro Sekunde* an, das Massenträgheitsmoment J_0 in $\mathrm{g \cdot cm^2}$

Scheibenmaterial		Setzerblei
Dicke	D	1 cm
Achse		Stahl, 6 mm
Achsenlänge		10 cm
Masse	m	300 g
Radius	r_1	3 cm
Trägkeitsmoment	J	1380 $\mathrm{g\,cm^2}$
Schwerpunkt	ℓ	2,4 cm
Spitzenradius	r_{s}	0,3 cm

Tabelle 1: Eigenschaften des Versuchskreisels.

Kreisel mit viel kinetischer Energie und wenig Reibung am Auflager laufen länger und stabiler. Ein Tischkreisel darf andererseits nicht zu schwer sein, sonst läßt er sich nicht von Hand mit hoher Drehzahl f_0 anwerfen. Schwere und spitze Kreisel neigen auch dazu, die Tischplatte unschön anzubohren. Die wichtigsten Merkmale eines guten Kreisels sind ein hohes Massenträgheitsmoment bei moderater Masse und eine Spitze, die auf dem Tisch in Pirouetten rollt und nicht bohrt. 600 bis 700 g Masse ist nach meiner Erfahrung die äußerste Obergrenze, doch leichtere Kreisel mit 100 bis 300 g laufen schon sehr gut. Die Spitze muss exakt rund sein, damit der Tischkreisel seine Energie nicht durch Vibration vergeudet. Die Daten des Kreisels, den wir in den Versuchen verwenden, sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Aus den

Aluminium	Eisen*	Blei	Messing
2,7	7,9	11,3	8,4. . . 8,8

Tabelle 2: Dichten von spanend bearbeitbaren Metallen in $\mathrm{g/cm^3}$, *Automatenstahl.

Maßen des Kreisels und der Dichte des verwendeten Materials kann man sowohl seine Masse m als auch das Massenträgheitsmoment J_0 berechnen. Für eine zylindrische Scheibe mit Außenradius r_1, Lochradius r_0, Dicke D und Massendichte ρ (in $\mathrm{g/cm^3}$) ist, siehe Tabelle 2

$$\left.\begin{array}{rcl} J_0 \quad [\mathrm{g\,cm^2}] & = & \frac{\pi}{2}\, \rho\, D\, \left(r_1^4 - r_0^4\right) \\ m \quad [\mathrm{g}] & = & \pi\, \rho\, D\, \left(r_1^2 - r_0^2\right) \end{array}\right\} \quad (3)$$

Man kann dies auch als

$$J_0 \;=\; \frac{1}{2}\, m\, (r_1^2 + r_0^2) \quad (4)$$

schreiben, so dass man das Trägfheitsmoment allein aus der Masse und den Radien des Kreisels berechnen kann. Ferner kann man sich jeden rotationssymmetrischen Kreisel man sich als Komposition von verschiedenen zylindrischen Scheiben denken. Das Massenträgheitsmoment ist dann die Summe der Einzelmomente.

Die Lage des *Schwerpunktes* auf der Achse legt das Kippmoment fest. Ein hoher Schwerpunkt führt zu einer schnelleren Präzession und zu mehr Reibung. Andererseits ist ein gewisser Mindestabstand sinnvoll, weil dann der Kreisel weiter kippen kann ohne mit seinem Außenrand an der Unterlage zu schleifen.

2.3 Anwerfen des Kreisels

Zum Anwerfen fasst man den oberen Teil der Achse zwischen den flachen Handflächen und zieht sie dann mit Druck gegeneinander ab, wobei man die Kreiselspitze dicht über der Tischplatte hält. Rechtshänder ziehen die rechte Hand zumeist zum Körper und drücken die linke Hand von ihm weg. Der Kreisel rotiert dann, von oben gesehen, im Uhrzeigersinn. Von unten gesehen, in Richtung des Vektors $\vec{\ell}$, entspricht das dem mathematisch positiven Gegenuhrzeigersinn. Das

legen wir als *Normrichtung* fest, die wir dazu benötigen, die Vorzeichen von Kräften und Drehmomenten in unseren Berechnungen konsistent angeben zu können. Nichts hindert uns natürlich daran, den Kreisel umgekehrt anzuwerfen.

3 Kamera und Stroboskop-Effekt

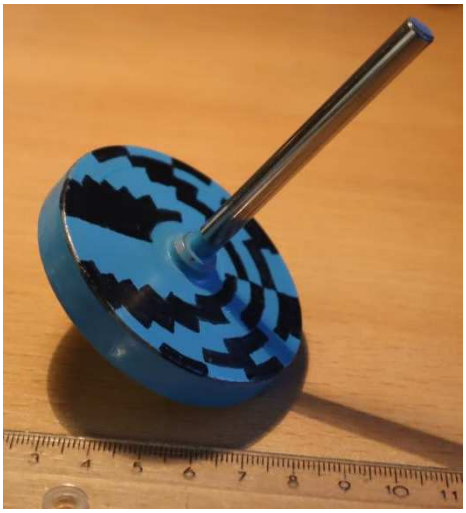

Abbildung 1: Stroboskopmuster auf einem Kreisel mit $n = 2, 3, 4, 5, 6$ und 8.

n, B	18 fps	25 fps	30 fps	50 Hz	100 Hz
2	9,0	12,5	15,0	25,0	50,0
3	6,0	8,33	10,0	16,67	33,33
4	4,5	6,25	7,5	12,5	25,0
5	3,6	5,0	6,0	10,0	20,0
6	3,0	4,17	5,0	8,33	16,67
8	2,25	3,125	3,75	6,25	12,5

Tabelle 3: Drehfrequenzen f_0 in s^{-1} still stehender Strobmuster der Ordnung n bei verschiedenen Bildraten B bzw. Stroboskopfrequenzen.

Nun etwas zu Kamera und Aufnahmetechnik. Aus einer Videoaufnahme des präzedierenden Tischkreisels können sowohl die Drehzahl f_0 also auch die Präzessionsfrequenz f_p bestimmt werden. Dies ist mit einer handelsüblichen Kompaktkamera ohne weiteres möglich und wird am

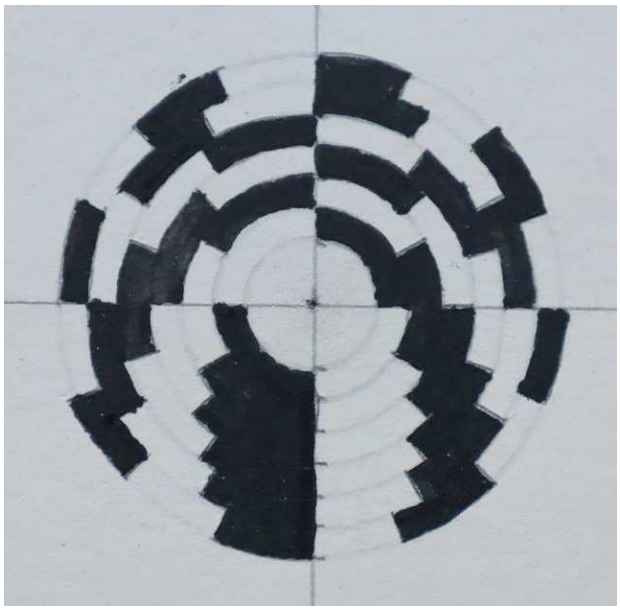

Abbildung 2: Hier noch einam das Stroboskopmuster. Einfach aus dem Text herauskopieren, skalieren und Ausdrucken

besten bei Tageslicht durchgeführt, das nich flackert.

Der Kreisel muss dazu ein stroboskopisches Muster auf seiner Schwungscheibe tragen wie in Abbildung 1. Bild 2 ist als Vorlage für Ihre eigenen Experiment gedacht. Das Strobomuster besteht aus einem oder mehreren achsenkonzentrischen Kreisringen, die jeweils in Zahl $2n$ Sektoren unterteilt sind. Diese Sektoren werden abwechselnd hell und dunkel eingefärbt. In einer Videoaufnahme, die zum Beispiel mit einer Bildrate $B = 25\,\mathrm{fps}$ aufgenommen wurde, scheinen diese Ringe vorwärts oder rückwärts zu laufen. Wenn die Drehzahl f_0 gerade so ist, dass sich der Kreisel zwischen zwei Einzelbildern gerade um den n-ten Bruchteil einer Umdrehung weiterbewegt hat, dann steht dieses Muster im Video still. Die Kreiseldrehzahl ist hier

$$f_0 \;=\; B\,/\,n \tag{5}$$

Wir geben sie in Umdrehungen pro Sekunde an, siehe auch Tabelle 3. Abbildung 3 zeigt ein Einzelbild aus einem solchen Video, das, da es natürlich statisch ist, gleich verschiedene sichtbare Strobomuster zeigt. Die Bildrate B des Videos

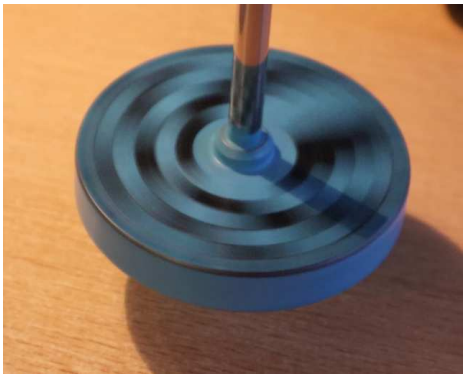

Abbildung 3: Stroboskopmuster auf einem Keisel.

ist in den Einstellungen der Digitalkamera hinterlegt. 25 fps sind ganz typisch, aber auch 18 oder 30 fps wird man finden. Wenn also das Muster mit $n = 4$ dunklen Sektoren in dem Video still zu stehen scheint, dann rotiert der Kreisel mit $f_0(n = 4) = 6,25\,\mathrm{s}^{-1}$. Man kann den Effekt mit bloßem Auge auch verfolgen, wenn man den Kreisel im intermittierenden Licht einer netzbetriebenen Leuchtstoffröhre beobachtet, das mit 50 oder 100 Hz flackert.

Die Präzessionsfrequenz f_p läßt sich am besten mit der Zeitmarke in der Aufnahme bestimmen. Wenn das stroboskopische Muster mit n dunklen Sektoren ungefähr still steht, dann kann man in einem kurzen Videoausschnitt die Zeitspanne ablesen, die der Kreisel für zum Beispiel 10 Präzessionsrunden benötigt. So erfährt man die Präzessionsfrequenz f_p bei der betreffenden Drehzahl $f_0(n)$. Aus den Präzessionszeiten für verschiedene Werte von n und den jeweiligen Drehzahlen ergibt sich eine Tabelle, die f_p als Funktion von f_0 beschreibt. Genau diese Tabelle werden wir im Versuch erstellen.

4 Präzession des schweren, spitzen Kreisels

Die Präzession sorgt dafür, dass der Kreisel trotz seines Gewichts nicht umkippt. Das Kippmonent wird durch die ständige Veränderung der Drehimpulsachse kompensiert. Dies wollen wir erläutern.

4.1 Wovon hängt die Präzessionsfrequenz ab?

Die Gewichtskraft, die den Kreisel zu kippen versucht, greift in seinem Schwerpunkt P an. Daraus resultiert ein Kippmoment $\vec{N}_\mathrm{k}$, dass am Fußpunkt Q des Kreisels angreift. Es ist zur Masse m des Kreisels, zur Länge d_k des Hebels zwischen Fuß- und Schwerpunkt sowie zum Sinus des Präzessionswinkel θ proportional:

$$\left.\begin{aligned} \vec{N}_\mathrm{k} &= m\,g\,d_\mathrm{k}\,\vec{n}\times\vec{\ell} \\ N_\mathrm{k} &= m\,g\,d_\mathrm{k}\,\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Durch die Präzession wird die Orientierung des Drehimpulsvektors $\vec{L} = J\,\vec{\omega}_0$ kontinuierlich verändert. Die zeitliche Änderung eines Drehimpulses ist ein Drehmoment. Hieraus resultiert das Richtmoment

$$\left.\begin{aligned} \vec{N}_\mathrm{p} &= \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}_\mathrm{p}\times\vec{L} \\ &= -J\,\vec{\omega}_\mathrm{p}\times\vec{\omega}_0 \\ N_\mathrm{p} &= -J\,\omega_\mathrm{p}\,\omega_0\,\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

wobei wir die Frequenzen als Kreisfrequenzen $\omega_0 = 2\pi f_0$ und $\omega_\mathrm{p} = 2\pi f_\mathrm{p}$ schreiben. Es war *Leonhard Euler* (1707 – 1783), der den fundamentalen Zusammenhang von Drehimpuls und Drehmoment in der langsamen, 25 000 Jahre dauernden Präzessionperiode der Polarachse unseres Planeten gegenüber den Fixsternhimmel erkannt hat. Sie entsteht aus dem Zusammenwirken der Erdrotation mit den Gezeitenkräften, die Sonne und Mond auf die Erdachse ausüben. Aus der Forderung nach gegenseitiger Kompensation der Drehmomente ergibt sich im vorliegenden Fall eine sehr viel höhere Präzessionsfrequenz:

$$\omega_\mathrm{p} = \frac{m\,g\,d_\mathrm{k}}{J\,\omega_0} \qquad (8)$$

Hierbei ist $g = 981\,\mathrm{cm/s}^2$ die Schwerebeschleunigung. Die Präzessionsfrequenz ist in der Zeit konstant. Sie hängt offenkundig nicht vom Präzessionswinkel θ ab. Das macht ihre praktische Messung einfach. Sie ändert sich in dem Maße, wie die Rotationsfrequenz ω_0 durch die Reibung der Kreiselspitze an der Unterlage abnimmt, und zwar nimmt ω_p zu! Dadurch kommen nach und

nach Strobomuster von immer höherer Ordnung n zum Stillstand. Der Tischkreisel präzediert immer schneller und neigt sich weiter zur Seite, bis er schließlich die Unterlage streift und liegen bleibt.

4.2 Wieso läuft die Präzession von selbst an?

Dieser Effekt basiert auf einem besonderen Mechanismus. Nach dem Anwerfen und Aufstellen auf die Unterlage befindet sich der Kreisel in einer instabilen vertikalen Lage und beginnt zunächst seitwärts zu kippen. Dadurch entsteht ein zusätzliche Drehimpuls $\vec{L}_p = J_1\vec{\omega}_\mathrm{k}$ um die Kippachse $\vec{b}$. J_1 ist das zweite Hauptträgheitsmoment des Kreisels und $\vec{\omega}_\mathrm{k} = \vec{\ell} \times \vec{b}\,\dot{\theta}$ die Kreisfrequenz der Kippbewegung. Die Kippachse $\vec{b}$ ($|\vec{b}| = 1$, $\vec{b} \perp \vec{n}$, $\vec{b} \perp \vec{\ell}$) liegt in der Horizontalen, und $\dot{\theta}$ ist die zeitliche Ableitung des Präzessionswinkels. Der kippende Drehimpuls $\vec{L}_\mathrm{p}$ ist sowohl senkrecht zu $\vec{L}$ als auch zu $\vec{N}_\mathrm{k}$ gerichtet und greift somit nicht in das oben genannte Momentengleichgewicht ein. Nach einer gewissen Zeit ist das Richtmoment so weit gewachsen, dass die Kippbewegung durch die azimutale Präzession und ihr Richtmoment unterbunden wird. Der Präzessionswinkel θ verharrt dann auf einem konstanten Gleichgewichtswert. Während der Anfangsphase der Kippung vollführt die Kreiselachse abklingende Schwingungen, die man als *Nutation* bezeichnet. Diese untersuchen wir hier nicht, sondern warten stets deren Abklingen ab.

4.3 Was passiert, wenn ich die Präzession störe?

Wollte man versuchen, die Präzessionsbewegung zu stoppen, indem man der Kreiselachse ein Hindernis in den Weg stellt, dann verbrauchte die Kraft, mit der das Hinderniss die weitere Präzession unterbindet, genau jenes kompensierende Drehmoment. Der Kreisel würde umkippen.

Wenn man versucht, den Kreisel mit der Hand umzuwerfen, indem man seitwärts auf die Achse drückt, dann beschleunigt sich die Präzession. Das aufrichtende Moment wird dadurch verstärkt und wirkt diesem Versuch entgegen.

Möchte man den Präzessionswinkel θ eines laufenden Kreisels verändern, ohne seine Rotation durch den Eingriff abzubremsen, dann gelingt dies durch einen gezielten senkrechten Schlag mit einem harten Stab von hinten oder von vorne gegen das obere Ende der Kreiselachse. Der Zeitpunkt des Schlags muss auf die Phasenlage der Präzession abgestimmt sein, damit der Drehmomentenstoß den Drehimpuls $\vec{L}_\mathrm{p}$ der Präzession in der beabsichtigten Weise verändert, nicht aber den Drehimpuls $\vec{L}$ um die Achse des Kreisels. Wenn der Stoß in Richtung der Präzessionsbewegung erfolgt, dann richtet sich der Kreisel auf, das heißt, θ wird kleiner. Trifft ihn der Stoß gegen die Präzession, dann erhöht man den Winkel θ.

4.4 Was passiert, wenn die Kreiselspitze rund und nicht spitz ist?

Das bisher Gesagte bezieht sich auf einen schweren Kreisel, dessen Spitze exakt punktförmig und die dadurch im Verlauf der Präzession ortsfest ist. Dies ist bei einem Tischkreisel aber schwierig, da Spitze und Unterlage hoch belastet werden. Es ist vorteilhafter, die Spitze durch Abfeilen zu verrunden. Dazu spannt man die Achse am besten in eine Drehmaschine ein und bearbeitet die Spitze bei langsamer Rotation mit der Stahlfeile. Das garantiert ein exakt rotationssymmetrisches Profil, wodurch der schräg stehende Kreisel sehr ruhig auf einer Tischplatte abrollen kann. Die bearbeitete Spitze läßt sich durch eine *Profilfunktion* $R(z)$ beschreiben, die den Radius der Achse als Funktion des axialen Abstandes $z \geq 0$ vom äußersten äußersten Punkt der Spitze angibt.

Wenn der Kreisel mit einer Frequenz f_0 rotiert und im Winkel θ zur Vertikalen steht, dann liegt seine Spitze etwas seitlich auf der Unterlage auf und nicht in der idealen Achse des Kreisels. Der Berührungs- oder Abrollpunkt liegt dort, wo die Schmiegeebene der Spitze mit der Horizontalen übereinstimmt:

$$R' \;=\; \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z} \;=\; \cot\theta \qquad (9)$$

Diese Beziehung gilt *nicht* für den spitzen Kreisel. Wir setzen im Folgenden daher einen *stumpfen*

Kreisel voraus, bei dem die Kegelspitze unten in einen Paraboloiden von endlichem Krümmungsradius übergeht.

4.5 Der Pirouettenkreis

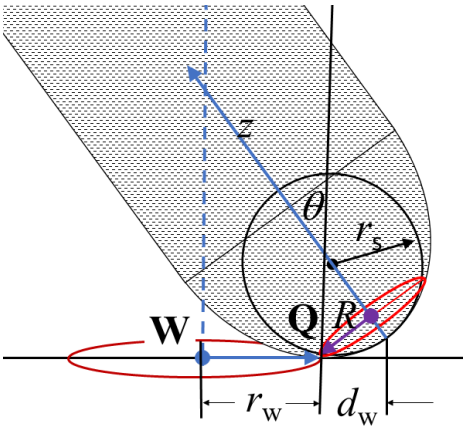

Abbildung 4: Die Pirouettenbewegung der stumpfen Kreiselspitze.

Die Rundung der Spitze läßt sich mathematisch ziemlich gut durch eine einfache *Parabel* beschreiben: $z = R^2/2r_\mathrm{s}$, wobei r_s der *Krümmungsradius* der Spitze ist. Aus der Parabelform folgt, dass umgekehrt $R = \sqrt{2r_\mathrm{s}z}$ ist, und dass die Steigung der Flanke am Radius R gegen die Kreiselachse gleich $R' = r_\mathrm{s}/R$ ist. Aus der Schmiegebedingung folgt dann, dass die Spitze entlang eines Umfangskreises mit Radius

$$R \;=\; r_\mathrm{s}\,\tan\theta \qquad (10)$$

auf der Unterlage abrollt. Je größer der Präzessionswinkel ist, um so größer ist auch der Abstand d_w des Abrollpunkts von der z-Achse, um die der Kreisel rotiert. Dies ist in Abbildung 4 skizziert.

Das Nachmessen von r_s gelingt am einfachsten an einem Foto von der Kreiselspitze wie in Abbildung 5. Ich habe das mit *GIMP* geöffnet, mit dem *Elliptischen Auswahlwerkzeug* einen Kreis an die Spitze angepasst und dann mit *Auswahl: Rand* den sichtbaren Kreisring darübergelegt.

Die Geschwindigkeit v_k, mit der sich die Kreiselspitze über die Unterlage wälzt, ist

$$v_\mathrm{k}(\theta) \;=\; \omega_0\,R \;=\; \omega_0 r_\mathrm{s}\,\tan\theta \qquad (11)$$

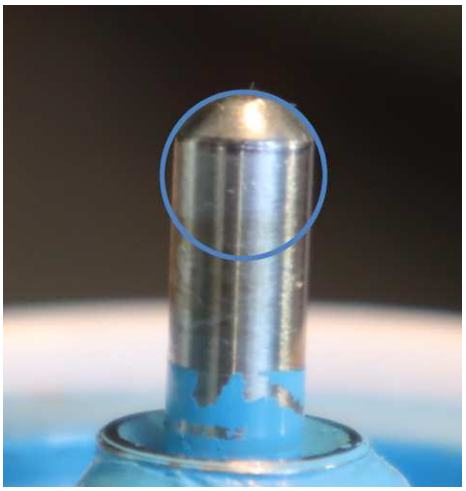

Abbildung 5: Im Bildbearbeitungsprogramm wird der Schmiegekreis an ie Spitze erstellt, dessen Radius $r_\mathrm{s} \approx 4$ mm ergibt sich aus dem Vergleich mit dem Achsdurchmesser, hier 6 mm.

Wir setzen voraus, dass die Rollbewegung frei von Schlupf ist.

Andererseits ist die Präzession des Kreisels ein stationärer Zustand, in dem Kräftegleichgewicht besteht. Daraus folgt, dass der Pfad, den die Kreiselspitze über der Unterlage während einer Periode der Präzession zurücklegt, wieder ein Kreis auf der Unterlage ist und nach einer Periode zum Ausgangspunkt zurückführt. Dieser *Pirouettenkreis* hat einen Radius r_w und einen Radiusvektor $\vec{r}_\mathrm{w}$, der vom Mittelpunkt W des Pirouettenkreises auf den Abrollpunkt zeigt. Die Gleichheit der Pfadlängen und Geschwindigkeiten auf der Kreiselspitze und der Unterlage erfordert nun, dass

$$\omega_\mathrm{p}\,r_\mathrm{w} \;=\; \omega_0\,R \;=\; \omega\,r_\mathrm{s}\,\tan\theta \qquad (12)$$

Der stumpfe Tischkreisel präzediert also nicht nur, er vollführt auch eine Pirouette. Sein Auflagepunkt läuft auf der Unterlage stetig in einem Kreis um. Das verursacht auf harten Oberflächen bisweilen ein typisches an- und abschwellendes Geräusch. Im Experiment ist das erwünscht. Es verhindert, dass sich die Kreiselspitze in die Unterlage bohrt. Die Reibung der rollenden Kreiselspitze ist zudem geringer als jene der schleifenden, und der Kreisel läuft länger.

4.6 Die Präzessionsfrequenz eines stumpfen Kreisels

Andererseits entsteht durch die zusätzliche kreisende Bewegung der Kreiselspitze ein weiteres Drehmoment, das auf die Kreislachse einwirkt. Die Zentrifugalbeschleunigung, die an der Kreiselspitze entsteht, ist gleich

$$\vec{a}_\mathrm{w} \;=\; \vec{\omega}_\mathrm{p} \times [\vec{\omega}_\mathrm{p} \times (\vec{r}_\mathrm{w} \,+\, \vec{d}_\mathrm{w})] \qquad (13)$$

Hierin beschreibt $\vec{d}_\mathrm{w}$ den kleinen Versatz des Auflagepunkts Q zur Kreiselspitze. Es ist einerseits $d_\mathrm{w} \;=\; r_\mathrm{s} \sin\theta$, zweitens ist mit Gleichung (10) auch $d_\mathrm{w} = R\cos\theta$. Die Beschleunigung ist, da $\vec{\omega}_\mathrm{p}$ auf $\vec{r}_\mathrm{w}$ senkrecht steht, wieder in Richtung von $\vec{r}_\mathrm{w}$ orientiert. Also folgt

$$\begin{aligned} \vec{a}_\mathrm{w} \;&=\; -\,\omega_\mathrm{p}^2 \left(\vec{r}_\mathrm{w} \,+\, \vec{d}_\mathrm{w}\right) \\ &=\; -\,\omega_\mathrm{p}\,(\omega_0 \,+\, \omega_\mathrm{p}\cos\theta)\; R\,\frac{\vec{r}_\mathrm{w}}{r_\mathrm{w}} \end{aligned} \qquad (14)$$

Hierbei wurde Gleichung (12) verwendet. Die Beschleunigung a_w wirkt damit senkrecht zur Schwerebeschleunigung $g\,\vec{n}$ und versucht, den Kreisel aufzurichten. Man erhält also

$$\left.\begin{aligned} \vec{N}_\mathrm{k,w} \;&=\; m\,d_\mathrm{k}\;(g\,\vec{n} \,+\, \vec{a}_\mathrm{w}) \times \vec{\ell} \\ N_\mathrm{k,w} \;&=\; m d_\mathrm{k}\,[g\sin\theta \,-\, \omega_\mathrm{p} \\ &\qquad \times (\omega_0 + \omega_\mathrm{p}\cos\theta)\; R\cos\theta] \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Berechnet man hiermit das Momentengleichgewicht aus Gleichung (8) neu und verwendet, dass gemäß Gleichung (10) $R\cos\theta = r_\mathrm{s}\sin\theta$ ist, dann erhält man die Nullstellengleichung eines quadratischen Polynoms in ω_p:

$$\omega_\mathrm{p}^2 \,+\, \frac{J'\,\omega_0}{m d_\mathrm{k} r_\mathrm{s}\,\cos\theta}\,\omega_\mathrm{p} \,-\, \frac{g}{r_\mathrm{s}\,\cos\theta} \;=\; 0 \qquad (16)$$

wobei

$$J' \;=\; J \,+\, m d_\mathrm{k} r_\mathrm{s} \qquad (17)$$

ist.

Nur eine der beiden möglichen Lösungen dieser Gleichung ist positiv. Sie lautet

$$\omega_\mathrm{p} \;=\; \frac{J'\omega_0}{2 r_\mathrm{s} m d_\mathrm{k}\,\cos\theta}\,\left[\sqrt{1 \,+\, \frac{4\,m^2 d_\mathrm{k}^2 g r_\mathrm{s}\,\cos\theta}{J'^2\omega_0^2}} \,-\, 1\right] \qquad (18)$$

Wir interressieren und für den Spezialfall, dass der Bruch unter der Quadratwurzel sehr klein ist gegen 1. Mit Hilfe der Taylorschen Reihe $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots$ erhalten wir

$$\omega_\mathrm{p} \;=\; \omega_\mathrm{p}^{(\mathrm{sp.}')} \,-\, \frac{r_\mathrm{s}}{g}\left(\omega_\mathrm{p}^{(\mathrm{sp.}')}\right)^3 \cos\theta + \ldots \qquad (19)$$

wobei

$$\omega_\mathrm{p}^{(\mathrm{sp.}')} \;=\; \frac{m d_\mathrm{k} g}{J'\omega_0} \qquad (20)$$

die Präzessionsfrequenz eines spitzen Kreisels mit einem gemäß Gleichung (17) erhöhten Massentraägkeitsmoment ist. Durch die Pirouettenbewegung des stumpfen schweren Kreisels ergibt sich also eine Erniedrigung der Präzessionsfrequenz gegenüber dem spitzen Kreisel. Je köher das Massenträgheitsmoment eines Kreisels ist, um so langsamer darf er präzedieren, um das Kippmoment auszuschalten. Zweitens gibt es eine Versatzkorrektur für die Präzessionsfrequenz, die der zweite Term in Gleichung (19 angibt. Sie ist durch die winzige Verschiebung zwischen Kreiselspitze und Abrollpunkt Q bedingt.

Beim Tischkreisel ist die Präzessionsfrequenz wie bei der spitzen Variante in sehr guter Näherung von θ unabhängig. Der reziproke Zusammenhang mit ω_0 besteht weiterhin. Die Präzession ist aufgrund der Pirouettenfahrt um einige zehn Prozent langsamer als bei einem gleichartigen spitzen Kreisel. Das ist ein großer Effekt! Zusätzlich kommt der Versatzfaktor aus Gleichung (19) hinzu, der die Präzessionsfrequenz nochmals um wenige Prozent reduzieren könnte. Um den Einfluss der stumpfen Kreiselspitze zu erkennen, braucht man also nur die Präzessionsfrequenzen zu messen und mit den Vorhersagen für die verschiedenen Kreiselmodelle zu vergleichen.

5 Vergleich Theorie und Experiment

Die Drehzahlen und Präzessionsfrequenzen wurden für die beiden Kreisel mittels Videoaufnahmen gemessen. Außerdem wurden die Präzessionsfrequenzen jeweils mit den verschiedenen, zunehmend genauen rechnerischen Modellen verglichen. Das sind im Einzelnen der spitzen Kreisel,

n	f_0	Experiment	Theorien		
	Hz	Hz	SP	ST	STV
3	8.33	0.76	1.32	1.08	1.06
4	6.25	1.00	1.76	1.44	1.39
5	5.00	1.33	2.20	1.80	1.70

Tabelle 4: Drehzahlen f_0, gemessene und berechnete und Präzessionsfrequenzen f_p von Kreisel 1.

n	f_0	Experiment	Theorien		
	Hz	Hz	SP	ST	STV
4	6.25	0.76	1.13	0.84	0.82
5	5.00	0.91	1.42	1.06	1.00
8	3.13	1.24	2.26	1.69	1.50
9	2.78	1.69	2.55	1.90	1.65
12	2.08	2.02	3.40	2.54	2.03

Tabelle 5: Drehzahlen f_0, gemessene und berechnete Präzessionsfrequenzen f_p von Kreisel 2.

dessen Präzessionsfrequenz in Gleichung (8) angegeben ist (Spalte SP in den Messwerttabellen 4 und 5), der stumpfe Kreisels nach Gleichung (18) (Spalte ST) sowie der stumpfen Kreisel mit zusätzlicher Versatzkorrektur nach Gleichung (20) (Spalte STV).

Der Präzessionswinkel θ betrug bei den Versuchen zwischen 5^o und 20^o, doch zeigte sich, dass sein Einfluss auf die Präzessionsfrequenz sowohl im Experiment als auch in der Theorie vernachlässigbar war. Für beide Tischkreisel findet man, dass die Übereinstimmung von gemessenen und berechneten Präzessionsmodellen mit zunehmender Genauigkeit des mechanischen Modells immer besser wird. Bei Kreisel 1 bleibt jedoch eine deutliche Diskrepanz. Modell SP überschätzt die Präzessionsfrequenzen um 70 % (Tabelle 4, Spalte 3 vs. 4). Bei Modell ST sind es maximal 44 % (Spalte 3 vs. 5) und bei STV noch immer 39 % (Spalte 3 vs. 6). Man muss davon ausgehen, dass hier ein systematischer Fehler vorliegt, der nun zu ergründen wäre.

Hingegen sagt das Modell STV das Präzessionsverhalten von Kreisel 2 recht genau voraus. Das Modell des spitzen Kreisels (SP) liefert für Kreisel 2 Frequenzen, die gegenüber dem gemessenen Wert durchgehend ca. 50 % zu hoch sind (Tabelle 5, Spalte 3 vs. 4). Hingegen beträgt die Abweichung für STV bis auf einen Fall stets unter 7 % (Spalte 3 vs. 6).

Zusammenfassend stellen wir also fest, dass das recht einfache Modell ST des spitzen Kreisels zwar wesentliche Merkmale der Präzession des Tischkreisels grob vorhersagen kann. Die Eigenschaft, dass f_p mit langsam werdender Drehfrequenz f_0 zunimmt, geht auch hieraus klar hervor. Insgesamt ist die Übereinstimmung der vorhergesagten Frequenz mit der Messung aber schlecht. Ein gute Übereinstimmung ergibt sich erst durch das Modell STV, das die Pirouettenbewegung des Kreisels und den seitlichen Versatz des Achsmittelpunkts gegen den Auflagepunkt der Kreiselspitze berücksichtigt.

*****

Das vorliegende Werk ist urheberrechtlich geschützt. Kopieren und Weiterverbreiten ist unter den Bedingungen der Creative Commons Lizenz CC BY-SA 4.0 *gestattet.*
Dr. Hans Martin Sauer, TU Darmstadt,
Magdalenenstraße 2, 64289 Darmstadt
Link zur Originaldatei:
`https://www.sauer-media.net/e-reports/Kreisel.pdf`
Redaktionsdatum: 20. Oktober 2025