

# Experimente mit Tischkreisel und Digitalkamera

Hans Martin Sauer

9. Dezember 2023



www.sauer-media.net  
Das Physik & Elektronik Archiv



Abbildung 1: Die Digitalkamera sieht am schnell rotierenden Tischkreisel mehr als das menschliche Auge.

## 1 Zusammenfassung

Mit einer Digital- oder Smartphone-Kamera lassen sich spannende Experimente machen. Sie sieht nämlich schneller Vorgänge als es das menschliche Auge kann. Zum Beispiel, wie schnell ein rotierender Kreisel nicht umkippt. Als Kind hatte ich einen Musikkreisel. Das ist ein geradezu ideales Beobachtungsobjekt für die Digitalkamera oder das Smartphone! So geht das Experiment: Kreisel mit der Hand anwerfen und auf den Fußboden oder Tisch setzen. Statt umzukippen taumelt, *präzediert* er. Das filmt man mit der Kamera. Den Rest erledigen Sie in aller Ruhe am Bildschirm. Sie kommen hinter das Geheimnis des sich aufrecht haltenden Kreisels. Ich zeige Ihnen, worauf Sie achten müssen.

## 2 Tischkreisel

Ein *Tischkreisel* – in der Physik bezeichnet man das als *schweren* Kreisel, weil neben seinem Drehimpuls auch das Kippmoment eine Rolle spielt – ist ein starrer Rotationskörper, der auf der Unterseite in einem mehr oder weniger spitzen, axialen Finger ausläuft. Versetzt man den Kreisel in Rotation und stellt ihn auf den Boden, dann fällt er nicht um wie ein gewöhnlicher Gegenstand, sondern bleibt aufrecht oder schräg stehen, wobei er *präzediert*. Denken Sie sich den Einheitsvektor  $\vec{n}$ , der, der senkrecht nach oben zeigt. Die Kreiselachse mit Einheitsvektor  $\vec{\ell}$ , der gegenüber  $\vec{n}$  um den *Präzessionswinkel*  $\theta$  geneigt ist, überstreicht mit einer Präzessionsfrequenz  $f_p$  einen Kegelmantel, der durch

$$\vec{n} \cdot \vec{\ell} = \cos \theta \quad (1)$$

beschrieben wird. Die *Präzessionsfrequenz*  $f_p$  ist kleiner als die Rotationsfrequenz  $f_0$  des Kreisels. Man fragt sich, wodurch  $f_p$  bestimmt wird und wodurch die Präzession in Gang gebracht wird.

Die Vektoren der Kreisfrequenzen  $\vec{\omega}_0 = 2\pi f_0 \vec{\ell}$  und  $\vec{\omega}_p = 2\pi f_p \vec{n}$  sind zur Kreiselachse  $\vec{\ell}$  ( $|\vec{\ell}| = 1$ ) beziehungsweise zur Normalen  $\vec{n}$  parallel.

### 2.1 Praktische Kreiselformen

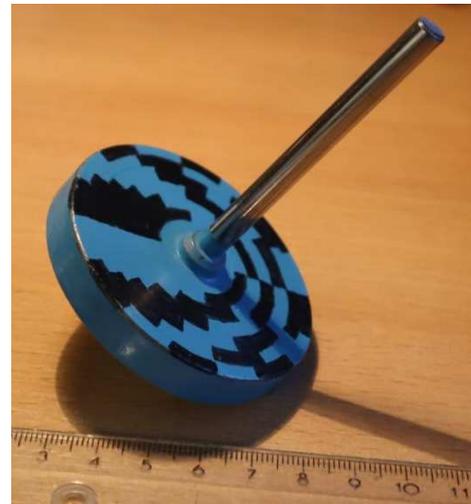


Abbildung 2: Auf Kreisel Nummer 1, siehe Tabelle 1, habe ich das Stroboskopmuster mit einem schwarzen Edding aufgemalt.

Um das in einem präzisen Experiment nachvollziehen zu können, habe ich zunächst an einer Drehmaschine zwei Tischkreisel mit Massen von 270 und 660 g hergestellt. Der Versuch gelingt auch mit Kreiseln aus dem Spielwarenhandel, die in einen Rahmen eingebaut sind und feste Achslager haben.

Bild 2 zeigt Versuchskreisel Nummer 1. Ich habe zuerst aus Blei einen groben Rogling für die Schwungscheibe gegossen. Diesen habe ich in einer Drehmaschine auf den zehntel Millimeter exakt rundgedreht und auf eine schon angespitzte, stählerne 6-Millimeter-Achse aufgezogen. Auch ein Stroboskopmuster habe ich auf die Scheibe gezeichnet. Wozu man das braucht, erkläre ich in einem der nächsten Abschnitte. Bei dem etwas größeren Kreisel Nummer 2 habe die Schwungscheibe aus Automatenstahl hergestellt. Da ist die Bearbeitung schon etwas aufwändiger als bei gegossenem Blei. Die Daten der Kreisel sind in Tabelle 1 angegeben. Diese sind wichtig zu wissen, um das Massenträgheitsmoment zu berechnen. Auch auf die genauen Form der Kreiselspitze kommt es an. Die Achse soll nicht etwa spitz zulaufen, sondern verrundet sein. Das unterscheidet den Tischkreisel von einem spitzen oder fest gelagerten Kreisel. Auf die besonderen Laufeigenschaften beider Kreiseltypen werden wir noch eingehen.

## 2.2 Wichtige Kreisel-Eigenschaften

Das *Massenträgheitsmoment*  $J_0$  ist das Verhältnis zwischen dem *Drehzahlvektor* des Kreisels und seinem *Drehimpuls*  $\vec{L}$ . Es legt zudem das Verhältnis seiner kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}$  zur Drehzahl fest. Der Drehzahlvektor  $\vec{\omega}_0 = 2\pi f_0 \vec{\ell}$  wird aus der Kreisfrequenz  $2\pi f_0$  der Rotation und dem Achsvektor  $\vec{\ell}$  gebildet, von der Kreiselspitze aus entlang der Achse nach oben gesehen.

$$\left. \begin{aligned} \vec{L} \quad [\text{g cm}^2/\text{s}] &= 2\pi f_0 J_0 \vec{\ell} \\ E_{\text{kin}} \quad [\text{Ws}] &= \frac{1}{2} 10^{-7} J_0 (2\pi f_0)^2 \end{aligned} \right\} (2)$$

Die Drehzahl  $f_0$  geben wir in *Umdrehungen pro Sekunde* oder Hz an, das Massenträgheitsmoment  $J_0$  in  $\text{g} \cdot \text{cm}^2$ .

Ein Kreisel mit viel kinetischer Energie und wenig Reibung läuft länger und stabiler. Ein Tischkreisel darf andererseits nicht zu schwer

Kreisel		1	2	
Scheibe		Blei*	Eisen**	
Dichte	$\rho$	11.3	7.9	$\text{g cm}^{-3}$
Dicke	$D$	1.0	1.5	cm
Achsenradius	$r_0$	0.3	0.5	cm
Achsenlänge		10	11	cm
Scheibenradius	$r_1$	3.0	4.0	cm
Schwerpunkt	$\ell$	2.4	3.0	cm
Spitzenradius	$r_s$	0.5	1.2	cm
Masse	$m$	300	660	g
Trägheitsmom.	$J$	1380	5060	$\text{g cm}^2$

Tabelle 1: Maße der verwendeten Tischkreisel (\*: Setzerblei Pb97Sb03; \*\*: Automatenstahl Werkstofftyp 1.0715)

Aluminium	Eisen*	Blei	Messing
2,7	7,9	11,3	8,4...8,8

Tabelle 2: Dichten von spanend bearbeitbaren Metallen in  $\text{g/cm}^3$ , \*Automatenstahl.

sein, sonst läßt er sich von Hand nicht mit genügender Drehzahl  $f_0$  anwerfen. Schwere und spitze Kreisel neigen auch dazu, die Tischplatte unschön anzubohren. Die wichtigsten Merkmale eines guten Kreisels sind ein hohes Massenträgheitsmoment bei moderater Masse und eine Spitze, die auf dem Tisch in Pirouetten rollt und nicht bohrt. 600 bis 700 g Masse dürfte die äußerste praktische Obergrenze sein, doch laufen Kreisel mit 100 bis 300 g schon sehr gut. Die Spitze muss exakt rund sein, damit die Rotationsenergie nicht durch Vibration vergeudet wird. Alle wichtigen Kreiseldaten sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Aus den Maßen des Kreisels und der Dichte des verwendeten Materials kann man sowohl seine Masse  $m$  als auch das Massenträgheitsmoment  $J_0$  berechnen. Für eine zylindrische Scheibe mit Außenradius  $r_1$ , Lochradius  $r_0$ , Dicke  $D$  und Massendichte  $\rho$  (in  $\text{g/cm}^3$ ) ist, siehe Tabelle 2

$$\left. \begin{aligned} J_0 \quad [\text{g cm}^2] &= \frac{\pi}{2} \rho D (r_0^4 - r_1^4) \\ m \quad [\text{g}] &= \pi \rho D (r_0^2 - r_1^2) \end{aligned} \right\} (3)$$

Man kann sich jeden runden Kreisel als Komposition von verschiedenen zylindrischen Scheiben denken. Das Massenträgheitsmoment ist dann

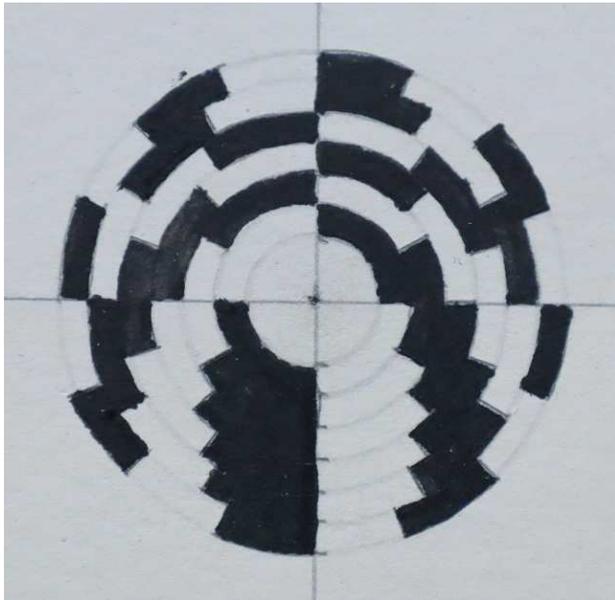


Abbildung 3: Hier das Stroboskopmuster als Vorlage. Einfach aus dem Text herauskopieren, skalieren und Ausdrucken.

die Summe der Einzelmomente. Die Lage des *Schwerpunktes* auf der Achse legt das Kippmoment fest. Ein hoher Schwerpunkt führt zu einer schnelleren Präzession und zu mehr Reibung. Andererseits ist ein gewisser Mindestabstand sinnvoll, weil dann der Kreisel weiter kippen kann ohne mit seinem Außenrand an der Unterlage zu schleifen.

### 2.3 Anwerfen des Kreisels

Zum Anwerfen fasst man den oberen Teil der Achse zwischen den flachen Handflächen und zieht sie dann mit Druck gegeneinander ab, wobei man die Kreiselspitze dicht über der Tischplatte hält. Rechtshänder ziehen die rechte Hand zumeist zum Körper und drücken die linke Hand von ihm weg. Der Kreisel rotiert dann, von oben gesehen, im Uhrzeigersinn. Nichts hindert uns natürlich daran, den Kreisel umgekehrt anzuwerfen.



Abbildung 4: Die Stroboskopscheibe sitzt auf Kreisel Nummer 2. Zur Aufnahme leistet meine alte DMC-TZ25 von Panasonic gute Dienste.

$n, B$	18 fps	25 fps	30 fps	50 Hz	100 Hz
2	9,0	12,5	15,0	25,0	50,0
3	6,0	8,33	10,0	16,67	33,33
4	4,5	6,25	7,5	12,5	25,0
5	3,6	5,0	6,0	10,0	20,0
6	3,0	4,17	5,0	8,33	16,67
8	2,25	3,125	3,75	6,25	12,5

Tabelle 3: Drehfrequenzen  $f_0$  in  $s^{-1}$  still stehender Strobomuster der Ordnung  $n$  bei verschiedenen Bildraten  $B$  bzw. Stroboskopfrequenzen.

## 3 Kamera und Stroboskop-Effekt

Nun etwas zu Kamera und Aufnahmetechnik. Aus einer Videoaufnahme des präzedierenden Tischkreisels können sowohl die Drehzahl  $f_0$  also auch die Präzessionsfrequenz  $f_p$  bestimmt werden. Dies ist mit einer handelsüblichen Kompaktkamera ohne weiteres möglich und wird am besten bei Tageslicht durchgeführt, das nicht mit 50-Hz-Netzfrequenz flackert.

Der Kreisel muss dazu ein stroboskopisches Muster auf seiner Schwungscheibe tragen wie in Abbildung 2. Bild 3 ist als Vorlage für Ihre eigenen Experiment gedacht. In Bild 4 ist das Muster auf eine Kartonscheibe gedruckt und auf den Kreisel geschoben worden. Das Strobomuster be-



Abbildung 5: Das Stroboskopmuster ermöglicht es, die Drehzahl des rotierenden Kreisels im Verhältnis zur Frame Rate des aufgenommenen Videos zu messen.

steht aus einem oder mehreren achsenkonzentrischen Kreisringen, die jeweils in Zahl  $2n$  Sektoren unterteilt sind. Diese Sektoren werden abwechselnd hell und dunkel eingefärbt. In einer Videoaufnahme, die zum Beispiel mit einer Bildrate  $B = 25$  fps aufgenommen wurde, scheinen diese Ringe vorwärts oder rückwärts zu laufen. Wenn die Drehzahl  $f_0$  gerade so ist, dass sich der Kiesel zwischen zwei Einzelbildern gerade um den  $n$ -ten Bruchteil einer Umdrehung weiterbewegt hat, dann steht dieses Muster im Video still. Die Kreiseldrehzahl ist hier

$$f_0 = B/n \quad (4)$$

Wir geben sie in Umdrehungen pro Sekunde an, siehe auch Tabelle 3. Abbildung 5 zeigt ein Einzelbild aus einem solchen Video, das, da es natürlich statisch ist, gleich verschiedene sichtbare Strobomuster zeigt. Die Bildrate  $B$  des Videos ist in den Einstellungen der Digitalkamera hinterlegt. 25 fps sind ganz typisch, aber auch 18 oder 30 fps wird man finden. Wenn also das Muster mit  $n = 4$  dunklen Sektoren in dem Video still zu stehen scheint, dann rotiert der Kiesel mit  $f_0(n = 4) = 6,25 \text{ s}^{-1}$ . Man kann den Effekt mit bloßem Auge auch verfolgen, wenn man den Kiesel im intermittierenden Licht einer netzbetriebenen Leuchtstoffröhre beobachtet, das mit 50 oder 100 Hz flackert.

Die Präzessionsfrequenz  $f_p$  läßt sich am besten mit der Zeitmarke in der Aufnahme bestimmen.

Wenn das stroboskopische Muster mit  $n$  dunklen Sektoren ungefähr still steht, dann kann man in einem kurzen Videoausschnitt die Zeitspanne ablesen, die der Kiesel für zum Beispiel 10 Präzessionsrunden benötigt. So erfährt man die Präzessionsfrequenz  $f_p$  bei der betreffenden Drehzahl  $f_0(n)$ . Aus den Präzessionszeiten für verschiedene Werte von  $n$  und den jeweiligen Drehzahlen ergibt sich eine Tabelle, die  $f_p$  als Funktion von  $f_0$  beschreibt. Genau diese Tabelle werden wir im Versuch erstellen.

## 4 Präzession des schweren, spitzen Kreisels

Nun kommen wir zur Physik des Kreisels und weshalb die Präzession dafür sorgt, dass der Kiesel nicht umkippt.

### 4.1 Wovon hängt die Präzessionsfrequenz ab?

Die Gewichtskraft, die den Kiesel zu kippen versucht, greift in seinem Schwerpunkt  $P$  an. Daraus resultiert ein Kippmoment  $\vec{N}_k$ , das am Fußpunkt  $Q$  des Kreisels angreift. Es ist zur Masse  $m$  des Kreisels, zur Länge  $d_k$  des Hebels zwischen Fuß- und Schwerpunkt sowie zum Sinus des Präzessionswinkel  $\theta$  proportional:

$$\left. \begin{aligned} \vec{N}_k &= m g d_k \vec{n} \times \vec{\ell} \\ N_k &= m g d_k \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Durch die Präzession wird die Orientierung des Drehimpulsvektors  $\vec{L} = J \vec{\omega}_0$  kontinuierlich verändert. Die zeitliche Änderung eines Drehimpulses erfordert ein Drehmoment, nämlich das Richtmoment

$$\left. \begin{aligned} \vec{N}_p &= \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}_p \times \vec{L} \\ &= -J \vec{\omega}_p \times \vec{\omega}_0 \\ N_p &= -J \omega_p \omega_0 \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die Frequenzen schreiben wir als Kreisfrequenzen  $\omega_0 = 2\pi f_0$  und  $\omega_p = 2\pi f_p$ . Es war *Leonhard Euler* (1707 – 1783), der diesen fundamentalen Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Drehmoment in der langsamen, 25 000 Jahre dauernden

Präzessionsperiode der Polarachse unseres Planeten gegenüber dem Fixsternhimmel erkannt hat. Sie entsteht durch das Richtmoment der Erdrotation, das den Gezeitenkräften entgegen wirkt, mit denen Sonne und Mond die Erdachse in ihre Bahnebene zu drehen versuchen. Die Erdachse ist bekanntlich um  $23^\circ$  gegen die Ekliptik geneigt. Das ist der Präzessionswinkel der Erdachse. Bei unserem Kreisel bewirkt die Kippkraft den gleichen Effekt, doch ist die Präzessionsfrequenz sehr viel größer:

$$\omega_p = \frac{m g d_k}{J \omega_0} \quad (7)$$

Hierbei ist  $g = 981 \text{ cm/s}^2$  die Schwerebeschleunigung. Die Präzessionsfrequenz ist in der Zeit konstant. Sie hängt offenkundig nicht vom Präzessionswinkel  $\theta$  ab. Das macht ihre praktische Messung einfach. Sie ändert sich in dem Maße, wie die Rotationsfrequenz  $\omega_0$  durch die Reibung der Kreisel Spitze an der Unterlage abnimmt, und zwar nimmt  $\omega_p$  zu! Dadurch kommen nach und nach Strobomuster von immer höherer Ordnung  $n$  zum Stillstand. Der Tischkreisel präzediert immer schneller und neigt sich weiter zur Seite, bis er schließlich die Unterlage streift und liegen bleibt.

## 4.2 Wieso läuft die Präzession von selbst an?

Dieser Effekt basiert auf einem besonderen Mechanismus. Nach dem Anwerfen und Aufstellen auf die Unterlage befindet sich der Kreisel in einer instabilen vertikalen Lage und beginnt zunächst seitwärts zu kippen. Dadurch entsteht ein zusätzliche Drehimpuls  $\vec{L}_p = J_1 \vec{\omega}_k$  um die Kippachse  $\vec{b}$ .  $J_1$  ist das zweite Hauptträgheitsmoment des Kreisels und  $\vec{\omega}_k = \vec{\ell} \times \vec{b} \dot{\theta}$  die Kreisfrequenz der Kippbewegung. Die Kippachse  $\vec{b}$  (mit  $|\vec{b}| = 1$ ) steht auf  $\vec{n}$  wie auch auf  $\vec{\ell}$  senkrecht und liegt in der Horizontalen.  $\dot{\theta}$  ist die zeitliche Änderung des Präzessionswinkels. Der kippende Drehimpuls  $\vec{L}_p$  ist sowohl senkrecht zu  $\vec{L}$  als auch zu  $\vec{N}_k$  gerichtet und greift somit nicht in das oben genannte Momentengleichgewicht ein. Nach einer gewissen Zeit ist das Richtmoment so weit gewachsen, dass eine weitere Kippung durch die angelaufene Präzession unterbunden wird. Der Präzessionswinkel  $\theta$  hat nun einem konstanten Gleichge-

wichtswert erreicht. Während der Anfangsphase der Kippung vollführt die Kreiselachse zusätzliche Schwingungen, die man als *Nutation* bezeichnet. Diese klingen bei Tischkreiseln aber schnell ab, so dass wir sie hier nicht beachten müssen.

## 4.3 Was passiert, wenn ich die Präzession störe?

Wollte man versuchen, die Präzessionsbewegung zu stoppen, indem man der Kreiselachse ein Hindernis in den Weg stellt, dann verbrauchte die Kraft, mit der das Hindernis die weitere Präzession unterbindet, genau jenes kompensierende Drehmoment. Der Kreisel würde umkippen.

Wenn man versucht, den Kreisel mit der Hand umzuwerfen, indem man seitwärts auf die Achse drückt, dann beschleunigt sich die Präzession. Das aufrichtende Moment wird dadurch verstärkt und wirkt diesem Versuch entgegen.

Möchte man den Präzessionswinkel  $\theta$  eines laufenden Kreisels verändern ohne seine Rotation durch den Eingriff abzubremesen, dann gelingt dies durch einen gezielten senkrechten Schlag mit einem harten Stab von hinten oder von vorne gegen das obere Ende der Kreiselachse. Der Zeitpunkt des Schlags muss auf die Phasenlage der Präzession abgestimmt sein, damit der Drehmomentenstoß den Drehimpuls  $\vec{L}_p$  der Präzession in der beabsichtigten Weise verändert, nicht aber den Drehimpuls  $\vec{L}$  um die Achse des Kreisels. Wenn der Stoß in Richtung der Präzessionsbewegung erfolgt, dann richtet sich der Kreisel auf, das heißt,  $\theta$  wird kleiner. Trifft ihn der Stoß gegen die Präzession, dann erhöht man den Winkel  $\theta$ .

## 4.4 Was passiert, wenn die Kreisel Spitze rund und nicht spitz ist?

Das bisher Gesagte bezieht sich auf einen schweren Kreisel, dessen Spitze exakt punktförmig und dadurch im Verlauf der Präzession ortsfest ist. Dies ist beim Tischkreisel nicht gewünscht, da Spitze und Unterlage sich schnell abschleifen. Daher verrundet man die Spitze durch Abfeilen. Auch das geht am einfachsten mit Drehmaschine und Stahlfeile. Durch die Verrundung rollt schräg stehende Kreisel sehr ruhig auf der Tischplatte.

Die bearbeitete Spitze lässt sich durch eine *Profilfunktion*  $R(z)$  beschreiben, die den Radius der Achse als Funktion des axialen Abstandes  $z \geq 0$  vom äußersten Punkt der Spitze angibt.

Wenn der Kreisel mit einer Frequenz  $f_0$  rotiert und im Winkel  $\theta$  zur Vertikalen steht, dann liegt seine Spitze etwas seitlich auf der Unterlage auf und nicht in der idealen Achse des Kreisels. Der Berührungs- oder Abrollpunkt liegt dort, wo die Schmiegeebene der Spitze mit der Horizontalen übereinstimmt:

$$R' = \frac{dR}{dz} = \cot \theta \quad (8)$$

Diese Beziehung gilt *nicht* für den spitzen Kreisel. Wir setzen im Folgenden daher einen *stumpfen* Kreisel voraus, bei dem die Kegelspitze unten in eine Parabel von endlichem Krümmungsradius  $r_s$  übergeht.

#### 4.5 Der Pirouettenkreis

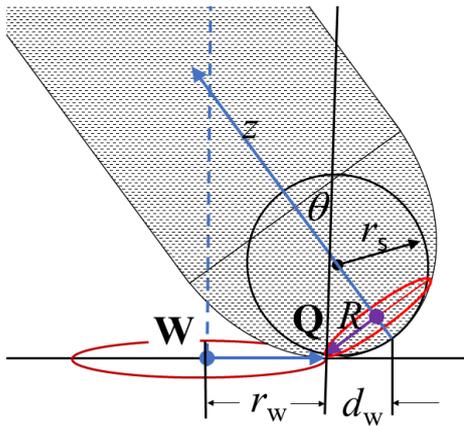


Abbildung 6: Die Pirouettenbewegung der stumpfen Kreiselspitze.

Die Rundung der Spitze lässt sich mathematisch ziemlich gut durch eine einfache *Parabel* beschreiben:  $z = R^2/2r_s$ , wobei  $r_s$  der *Krümmungsradius* der Spitze ist. Aus der Parabelform folgt, dass umgekehrt  $R = \sqrt{2r_s z}$  ist, und dass die Steigung der Flanke am Radius  $R$  gegen die Kreiselachse gleich  $R' = r_s/R$  ist. Beim Abrollen schmiegt sich die Spitze an die Horizontale an.

Daraus folgt, dass der Auflagepunkt auf dem Umfangskreis mit Radius

$$R = r_s \tan \theta \quad (9)$$

liegt und wie ein Rad dieses Radius auf der Unterlage abrollt. Je größer der Präzessionswinkel ist, um so größer ist auch der Abstand  $d_w$  des Abrollpunkts von der  $z$ -Achse, um die der Kreisel rotiert. Dies ist in Abbildung 6 skizziert.

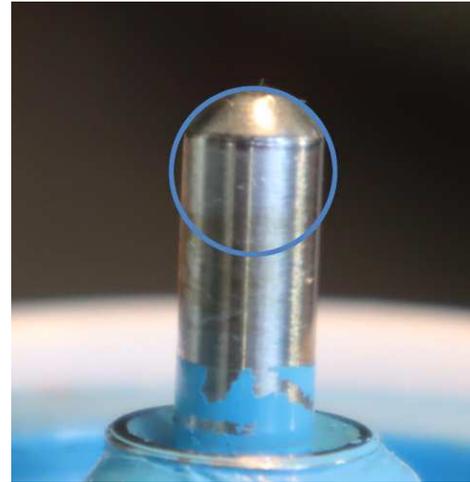


Abbildung 7: Im Bildbearbeitungsprogramm wird der Schmiegekreis an die Spitze erstellt, dessen Radius  $r_s \approx 4$  mm ergibt sich aus dem Vergleich mit dem Achsdurchmesser, hier 6 mm.

Das Nachmessen von  $r_s$  gelingt am einfachsten mit Hilfe der Kamera, nämlich an einem Foto von der Kreiselspitze wie in Abbildung 7. Ich habe das mit *GIMP* geöffnet, mit dem *Elliptischen Auswahlwerkzeug* einen Kreis an die Spitze angepasst. Dann habe ich mit *Auswahl: Rand* einen sichtbaren Kreisring darübergelegt.

Die Geschwindigkeit  $v_k$ , mit der sich die Kreiselspitze über die Unterlage wälzt, ist

$$v_k(\theta) = \omega_0 R = \omega_0 r_s \tan \theta \quad (10)$$

Der Pfad, den die Kreiselspitze über der Unterlage während einer Periode der Präzession zurücklegt, ist ein Kreis auf der Unterlage, den wir als *Pirouettenkreis* bezeichnen. Seinen Radius bezeichnen wir mit  $r_w$ , und sei Radiusvektor  $\vec{r}_w$  zeigt vom Mittelpunkt  $W$  des Pirouettenkreises auf den Abrollpunkt. Die Gleichheit der Geschwindigkeiten

des Abrollpunktes auf der Kreiselspitze und der Unterlage erfordert, dass

$$\omega_p r_w = \omega_0 R = \omega r_s \tan \theta \quad (11)$$

Der stumpfe Tischkreisel präzediert also nicht nur, er vollführt auch eine Pirouette. Sein Auflagepunkt läuft auf der Unterlage stetig in einem Kreis um. Das verursacht auf harten Oberflächen bisweilen ein typisches an- und abschwelliges Geräusch. Im Experiment ist das erwünscht. Die Reibung der verrundeten Kreiselspitze ist geringer als jene der spitzen, die die Unterlage eher abschleift.

#### 4.6 Die Präzessionsfrequenz eines stumpfen Kreisels

Andererseits entsteht durch die zusätzliche kreisende Bewegung der Kreiselspitze ein weiteres Drehmoment, das auf die Kreisachse einwirkt. Die Zentrifugalbeschleunigung, die an der Kreiselspitze entsteht, ist gleich

$$\vec{a}_w = \vec{\omega}_p \times [\vec{\omega}_p \times (\vec{r}_w + \vec{d}_w)] \quad (12)$$

Hierin beschreibt  $\vec{d}_w$  den kleinen Versatz des Auflagepunktes  $Q$  zur Kreiselspitze, siehe Bild 7. Es ist einerseits  $d_w = r_s \sin \theta$ , zweitens ist mit Gleichung (9) auch  $d_w = R \cos \theta$ . Die Beschleunigung ist, da  $\vec{\omega}_p$  auf  $\vec{r}_w$  senkrecht steht, wieder in Richtung von  $\vec{r}_w$  orientiert. Also folgt

$$\begin{aligned} \vec{a}_w &= -\omega_p^2 (\vec{r}_w + \vec{d}_w) \\ &= -\omega_p (\omega_0 + \omega_p \cos \theta) R \frac{\vec{r}_w}{r_w} \end{aligned} \quad (13)$$

Hierbei wurde Gleichung (11) verwendet. Die Beschleunigung  $a_w$  wirkt damit senkrecht zur Schwerebeschleunigung  $g \vec{n}$  und versucht, den Kreisel aufzurichten. Man erhält also

$$\left. \begin{aligned} \vec{N}_{k,w} &= m d_k (g \vec{n} + \vec{a}_w) \times \vec{\ell} \\ N_{k,w} &= m d_k [g \sin \theta - \omega_p \\ &\quad \times (\omega_0 + \omega_p \cos \theta) R \cos \theta] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Berechnet man hiermit das Momentengleichgewicht aus Gleichung (7) neu und verwendet, dass gemäß Gleichung (9)  $R \cos \theta = r_s \sin \theta$  ist, dann

erhält man die Nullstellengleichung eines quadratischen Polynoms in  $\omega_p$ :

$$\omega_p^2 + \frac{J' \omega_0}{m d_k r_s \cos \theta} \omega_p - \frac{g}{r_s \cos \theta} = 0 \quad (15)$$

wobei

$$J' = J + m d_k r_s. \quad (16)$$

Nur eine der beiden möglichen Lösungen dieser Gleichung ist positiv. Sie lautet

$$\omega_p = \frac{J' \omega_0}{2 r_s m d_k \cos \theta} \left[ \sqrt{1 + \frac{4 m^2 d_k^2 g r_s \cos \theta}{J'^2 \omega_0^2}} - 1 \right] \quad (17)$$

Wir interessieren uns für den Spezialfall, dass der Bruch unter der Quadratwurzel sehr klein ist gegen 1. Mit Hilfe der Taylorsche Reihe  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$  erhalten wir

$$\omega_p = \omega_p^{(sp.')} - \frac{r_s}{g} \left( \omega_p^{(sp.')} \right)^3 \cos \theta + \dots \quad (18)$$

wobei

$$\omega_p^{(sp.')} = \frac{m d_k g}{J' \omega_0} \quad (19)$$

die Präzessionsfrequenz eines spitzen Kreisels mit einem gemäß Gleichung (16) erhöhten Massenträgheitsmoment ist. Durch die Pirouettenbewegung ergibt sich also eine Erniedrigung der Präzessionsfrequenz gegenüber dem spitzen Kreisel. Je höher das Massenträgheitsmoment eines Kreisels ist, desto langsamer darf er präzedieren, um das Kippmoment auszuschalten. Zweitens gibt es eine Versatzkorrektur für die Präzessionsfrequenz, die der zweite Term in Gleichung (18) angibt. Sie ist durch die winzige Verschiebung zwischen Kreiselspitze und Abrollpunkt  $Q$  bedingt.

Beim Tischkreisel ist die Präzessionsfrequenz wie bei der spitzen Variante in sehr guter Näherung von  $\theta$  unabhängig. Der reziproke Zusammenhang mit  $\omega_0$  besteht weiterhin. Die Präzession ist aufgrund des durch die Pirouettenfahrt um einige zehn Prozent langsamer als bei einem gleichartigen spitzen Kreisel. Zusätzlich kommt der Versatzfaktor aus Gleichung (18) hinzu, der die Präzessionsfrequenz nochmals um wenige Prozent reduzieren könnte. Um den Einfluss der stumpfen Kreiselspitze zu erkennen, braucht man also nur die Präzessionsfrequenzen

$n$	$f_0$ Hz	Experiment Hz	Theorie		
			SP	ST	STV
3	8.33	0.76	1.32	1.08	1.06
4	6.25	1.00	1.76	1.44	1.39
5	5.00	1.33	2.20	1.80	1.70

Tabelle 4: Präzessionsfrequenzen  $f_p$  von Kreis 1.

$n$	$f_0$ Hz	Experiment Hz	Theorie		
			SP	ST	STV
4	6.25	0.76	1.13	0.84	0.82
5	5.00	0.91	1.42	1.06	1.00
8	3.13	1.24	2.26	1.69	1.50
9	2.78	1.69	2.55	1.90	1.65
12	2.08	2.02	3.40	2.54	2.03

Tabelle 5: Präzessionsfrequenzen  $f_p$  von Kreis 2.

zu messen und mit den Vorhersagen für die verschiedenen Kreismodelle zu vergleichen.

## 5 Versuchsergebnisse

Die Präzessionsfrequenzen, die aus den Videoaufnahmen mit den beiden Kreiseln gemacht wurden, sowie die Ergebnisse der Frequenzberechnung mit den zunehmend genaueren Modellen des spitzen Kreisels (SP), des stumpfen Kreisels (ST) sowie des stumpfen Kreisels mit Versatzkorrektur (STV) sind in den Tabellen 4 und 5 zusammengestellt. Der Präzessionswinkel  $\theta$  betrug bei den Versuchen zwischen  $5^\circ$  und  $20^\circ$ , doch zeigte sich, dass sein Einfluss auf die Präzessionsfrequenz sowohl im Experiment als auch in der Theorie vernachlässigbar war.

Für beide Tischkreisel findet man, dass die Übereinstimmung von gemessenen und berechneten Präzessionsmodellen immer besser wird. Bei Kreis 1 bleibt jedoch eine deutliche Diskrepanz. Modell SP überschätzt die Präzessionsfrequenzen um 70 % (Tabelle 4, Spalte 3 vs. 4). Bei Modell ST sind es maximal 44 % (Spalte 3 vs. 5) und

bei STV noch immer 39 % (Spalte 3 vs. 6). Man muss davon ausgehen, dass hier ein systematischer Fehler vorliegt, der nun zu ergründen wäre.

Hingegen sagt das Modell STV das Präzessionsverhalten von Kreis 2 recht genau voraus. Das Modell des spitzen Kreisels (SP) liefert für Kreis 2 Frequenzen, die gegenüber dem gemessenen Wert durchgehend ca. 50 % zu hoch sind (Tabelle 5, Spalte 3 vs. 4). Hingegen beträgt die Abweichung für STV bis auf einen Fall stets unter 7 % liegen (Spalte 3 vs. 6).

Zusammenfassend stellen wir also fest, dass das recht einfache Modell ST des spitzen Kreisels zwar wesentliche Merkmale der Präzession des Tischkreisels grob vorhersagen kann. Die Eigenschaft, dass  $f_p$  mit langsam werdender Drehfrequenz  $f_0$  zunimmt, geht auch hieraus klar hervor. Insgesamt ist die Übereinstimmung der vorhergesagten Frequenz mit der Messung aber schlecht. Eine gute Übereinstimmung ergibt sich erst durch das Modell STV, das die Pirouettenbewegung des Kreisels und den seitlichen Versatz des Achsmittelpunkts gegen den Auflagepunkt der Kreiselspitze berücksichtigt.

*Das vorliegende Werk ist urheberrechtlich geschützt. Kopieren und Weiterverbreiten ist unter den Bedingungen der Creative Commons Lizenz CC BY-NC-SA 4.0 gestattet.*

Dr. Hans Martin Sauer, TU Darmstadt,  
Magdalenenstraße 2, 64289 Darmstadt  
Link zur Originaldatei:

<http://www.sauer-media.net/e-reports/Kreis1.pdf>

Redaktionsdatum: 9. Dezember 2023